Beweis der Transzendenz der Zahl e[1].

(Nachrichten von der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1893, S. 153–155;
wiederabgedruckt Mathematische Annalen, Bd. 43, 1893, S. 220–221.)

Einer brieflichen Mitteilung von Herrn Hilbert verdanke ich die Kenntnis seines neuen, überaus einfachen Beweises für die Transzendenz der Zahl e.

Ich habe nun bemerkt, dass man bei diesem Beweise die Benutzung der Integrale vermeiden kann, so dass der Beweis sich nur noch auf die ersten Elemente der Differentialrechnung stützt. In den folgenden Zeilen möchte ich mir erlauben, diese Modifikation des Hilbert'schen Beweises kurz mitzuteilen[2].

Bezeichnet $f(x)$ eine ganze rationale Funktion r^{ten} Grades von x, und setzt man zur Abkürzung

$$F(x) = f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(r)}(x), \tag{1}$$

so ist der Differentialquotient von $e^{-x}F(x)$ gleich $-e^{-x}f(x)$. Zufolge des bekannten Satzes:

$$\varphi(x) - \varphi(0) = x\varphi'(\vartheta x), \quad (0 < \vartheta < 1)$$

besteht daher die Gleichung

$$e^{-x}F(x) - F(0) = -xe^{-\vartheta x}f(\vartheta x),$$

oder

$$F(x) - e^{x}F(0) = -xe^{(1-\vartheta)x}f(\vartheta x), \quad (0 < \vartheta < 1). \tag{2}$$

Angenommen nun, die Zahl e genüge der Gleichung

$$C_0 + C_1 e + C_2 e^2 + \cdots + C_n e^n = 0, \tag{3}$$

wobei $C_0,\ C_1, C_2, \ldots\ C_n$ ganze Zahlen bedeuten, von denen die erste C_0, unbeschadet der Allgemeinheit, als von Null verschieden und positiv vorausgesetzt werde.

Ich wende nun die Gleichung (2) auf die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(1-x)^p(2-x)^p\cdots(n-x)^p$$

an, wo p eine Primzahl bedeutet, die grösser als die grössere der beiden Zahlen n und C_0 ist. Setzt man dann der Reihe nach $x = 1, 2, \ldots, n$, so ergibt sich

$$\begin{cases} F(1) - e\ F(0) = \varepsilon_1, \\ F(2) - e^2F(0) = \varepsilon_2, \\ \ \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ F(n) - e^nF(0) = \varepsilon_n, \end{cases} \tag{4}$$

wo

$$\varepsilon_k = -k \cdot e^{(1-\vartheta)k}\frac{(\vartheta k)^{p-1}(1-\vartheta k)^p\cdots(n-\vartheta k)^p}{(p-1)!} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

mit wachsendem p unter alle Grenzen sinkt. Man erhält aber nach (1) den Wert von $F(k)$ offenbar, indem man $f(k+h)$ nach Potenzen von h entwickelt, und sodann die Potenzen h, h^2, $h^3, \ldots$ bezüglich durch $1!, 2!, 3!, \ldots$ ersetzt. Daher sind

$$F(1),\ F(2), \ldots\ F(n)$$

ganze Zahlen, die durch p teilbar sind, $F(0)$ eine durch p nicht teilbare ganze Zahl.

Aus den Gleichungen (4) folgt nun mit Rücksicht auf (3):

$$C_1F(1) + C_2F(2) + \cdots + C_nF(n) + C_0F(0) = C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2 + \cdots + C_n\varepsilon_n.$$

Da die rechte Seite mit wachsendem p unter alle Grenzen sinkt, die linke Seite aber stets eine ganze Zahl ist, so muss

$$C_1F(1) + C_2F(2) + \cdots + C_nF(n) + C_0F(0) = 0 \tag{5}$$

sein, wenn man die Primzahl p genügend gross wählt. Die Gleichung (5) ist aber unmöglich, da auf der linken Seite eine durch p nicht teilbare ganze Zahl steht. Die Annahme, e genüge einer Gleichung der Gestalt (3), führt also auf einen Widerspruch, die Annahme ist also unzulässig; mid anderen Worten: e ist eine transzendente Zahl[3].

Zürich, den 18. Januar 1893.

---

[1] Hurwitz, Mathematische Werke, Bd. II, LIV, S. 134–135.

[2] Herr Hilbert hat übrigens, wie ich von ihm neuerdings erfahre, auch schon gelegentlich eines Vortrages Andeutungen gegeben, wie man die Integrale (und zugleich das Differenzieren) bei seinem Beweise vermeiden kann, indem man die Integrale durch Grenzwerte ersetzt.

[3] Herr Gordan hat kürzlich eine Abänderung des obigen Beweises gegeben, bei welcher nur von der Reihenentwicklung der Funktion e^x Gebrauch gemacht wird. Vgl.: Sur la transcendance du nombre e, Comptes rendus, vol. 116 (1893), p. 1040–1041. [Juni 1893]